Orientation et Formation Professionnelle

Tertiaire et Développement Informatique

ABCDEV

Algèbre de Boole

Sommaire

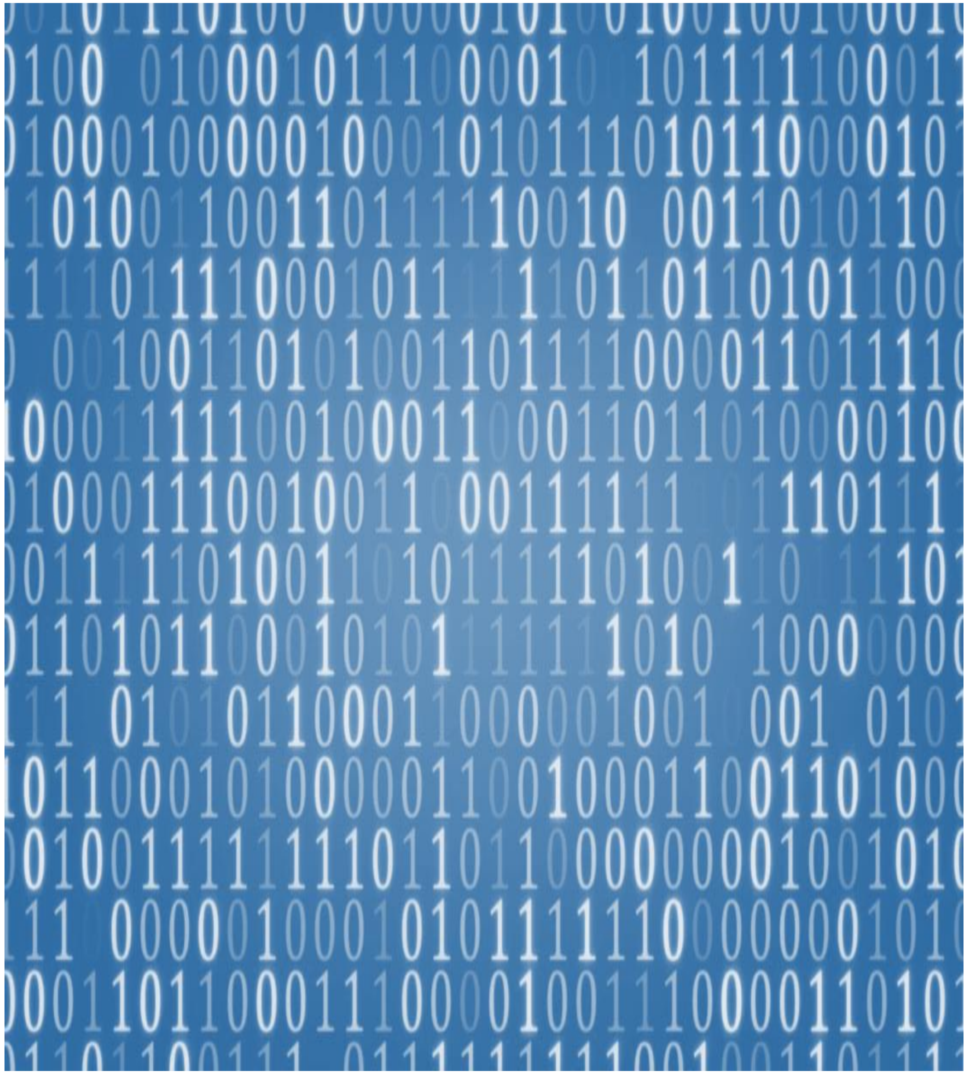
1

Introduction à la logique

1. Variable logique

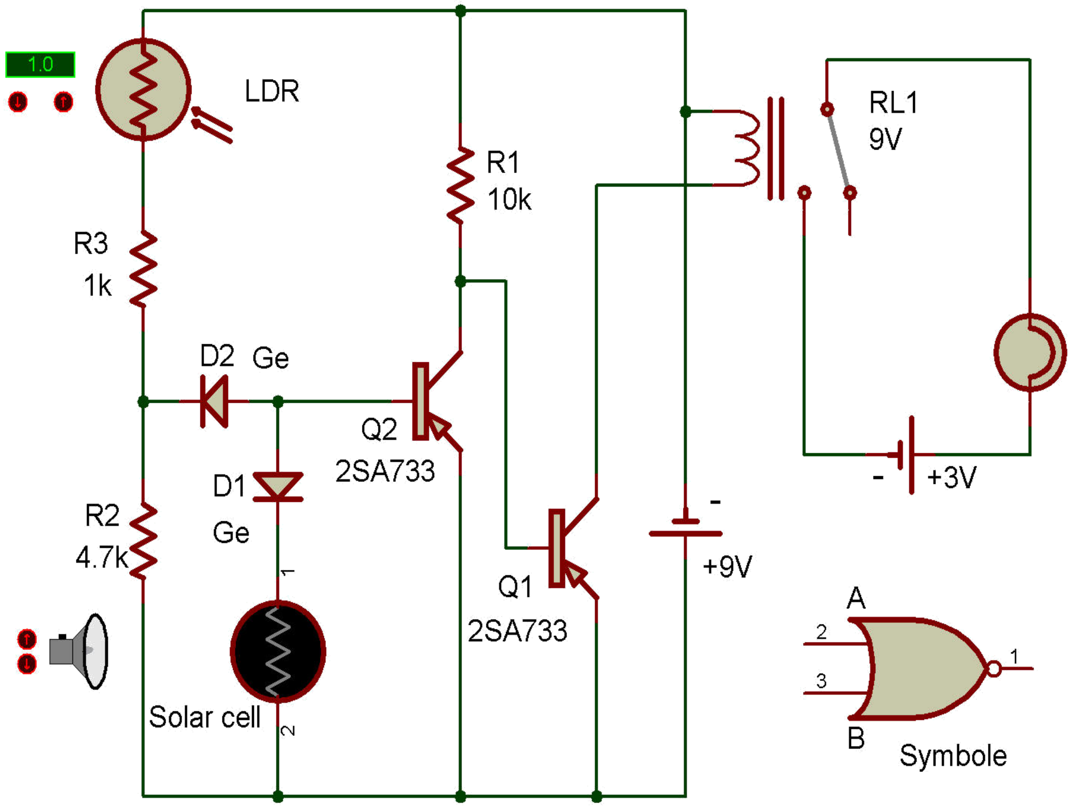
1. Variable logique

- Un ordinateur ne manipule que des données binaires
- Une donnée binaire est appelée variable logique
- 2 états possible 0 ou 1
- Proposition VRAIE ou FAUSSE
- Soit simple « il fait plus de 25°C »
- Soit complexe « il fait plus de 25°C ET il ne pleut pas »



Fonction logique

- Plusieurs valeurs logiques en entrée
- Sortie ayant 2 états possible 0 ou 1
- Les fonctions logiques de bases sont appelées portes logiques



La fonction « OU »

- Positionne sa sortie si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1
- Exemple :
  - Un four doit s'arrêter si la température voulue est atteinte ou si le temps prévu est écoulé

1 P1 : « La température est supérieure à T0 »

2 P2 : « Le temps est supérieur à t0 »

3 P3 : « Le four doit s'arrêter »

- P3 est vraie si :
  - P1 est vraie
  - OU
  - P2 est vraie
- P3 = P1 OU P2
- Cette fonction s'appelle **somme logique** ou **fonction OU**
- Si P1 et P2 vraie P3 vraie => OU inclusif

La fonction « ET »

- Positionne sa sortie à 1 si ses deux entrées sont à 1
- Exemple :
  - J'irais me promener s'il fait plus de 25°C et s'il ne pleut pas

1 P1 : « J'irais me promener»

2 P2 : « il fait plus de 25°C»

3 P3 : « il ne pleut pas»

- P1 est vraie si :
  - P2 est vraie
  - ET
  - P3 est vraie
- P1 = P2 ET P3
- Cette fonction s'appelle **produit logique** ou **fonction ET**

La fonction « NON »

- Positionne sa sortie à 1 si son entrée est à 0 et vice-versa

1 P1 : « J'irais me promener»

2 P2 : «il pleut»

- « J'irais me promener s'il ne pleut pas »
- P1 = NON P2
- Cette fonction s'appelle **négation** ou **fonction NON**

« OU » exclusif && « NON OU »

- **OU EXCLUSIF :**
- Sortie à 1 si l'une ou l'autre de ses entrées est à 1
- Mais pas les deux simultanément

- **NON OU** et **NON ET :**
- Composition respective d'un NON avec un OU et un ET

2

Fonction complexes

« J'irais me promener s'il fait plus de 25°C et qu'il ne pleut pas, ou si ma copine le veut »

P1 : « J'irais me promener»

P2 : « Il fait plus de 25°C»

P3 : « Il pleut»

P4 : « ma copine veut se promener»

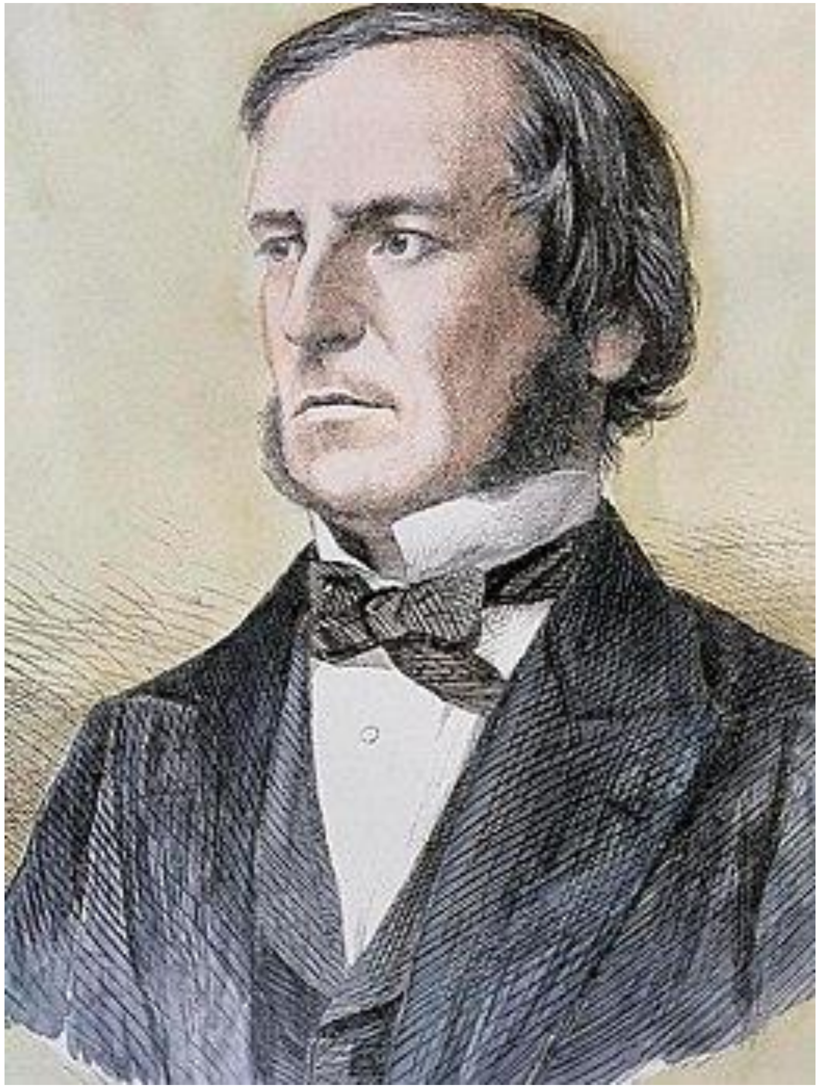
- P1 est vraie si :
  - P2 est vraie
  - ET
  - P3 est fausse
  - OU
  - P4 est vraie
- P1 = (P2 ET NON P3) OU P4

3

L’algèbre de Boole

Boole

- Mathématicien anglais du 19éme siècle
- Conçut un outil composé de symboles et de règles, applicable aux propositions logiques
- George Boole — Wikipédia (wikipedia.org)



4

Expression algèbrique

- La fonction **OU** est représentée par un plus : +
- La fonction **ET** est représentée par un point : **.**
- La fonction **NON** est représentée par une barre au-dessus de la variable : $\overline{A}$

  parfois par un / devant la variable
- La fonction **OU EXCLUSIF** est représentée par un plus encerclé : $\oplus$

Expression algébrique :

$$S = \overline{A} \oplus (B.C)$$

5

Table de vérité

Table de vérité des fonctions logiques :

Nom de la porte	Entrée		Sortie
	A	B	S
OU	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1
ET	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1
NON OU	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	0
NON ET	0	0	1
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0
NON	0		1
	1		0

Ecrire l’expression algébrique à partir de la table de vérité

Entrée		Sortie
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- La sortie vaut 1 lorsque A vaut 1 et B vaut 0

$$S = A.\overline{B}$$

- S = A ET NON B

Entrée			Sortie	
A	B	C	S	La sortie vaut 1 lorsque * A vaut 0 * B vaut 1 * C vaut 0 ou lorsque * A vaut 1 * B vaut 1 * C vaut 0
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

L'expression algébrique de cette fonction est donc :

S = NON A ET B ET NON C OU A ET B ET NON C

$$S = \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C}$$

Cas: « J’irai me promener s’il fait plus de 25°C et qu’il ne pleut pas, ou si ma copine le veut » avec les propositions :

- P1 : « j’irai me promener »
- P2 : « il fait plus de 25°C »
- P3 : « il pleut »
- P4 : « ma copine veut se promener »

$$P1 = P2.\overline{P3} + P4$$

Entrée			Sortie
P2	P3	P4	P1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

P1 = P2 ET NON P3 OU P4

Priorité des opérateurs logiques :

- Par ordre de priorité décroissante:
  NON, ET, OU.
- Des parenthèses changent l'ordre des priorités (comme en mathématiques).

6

Les lois de composition

Associativité

- (A.B).C est équivalent à A.(B.C)
- (A+B)+C est équivalent à A+(B+C)

Absorption

- A.(A+B) est équivalent à A
- A+A.B est équivalent à A

Commutativité

- A.B est équivalent à B.A
- A+B est équivalent à B+A

Distributivité

- A+(B.C) est équivalent à (A+B).(A+C)
- A.(B+C) est équivalent à A.B+A.C

Idempotence

- A.A est équivalent à A
- A + A est équivalent à A

Identité

- 1.A est équivalent à A
- 0+A est équivalent à A

Inversion

- A./A est équivalent à 0
- A+/A est équivalent à 1

Nullité

- 0.A est équivalent à 0
- 1+A est équivalent à 1

Théorème de De Morgan

- $\overline{A.B}$ est équivalent à $\overline{A}+\overline{B}$
- $\overline{A+B}$ est équivalent à $\overline{A}.\overline{B}$

7

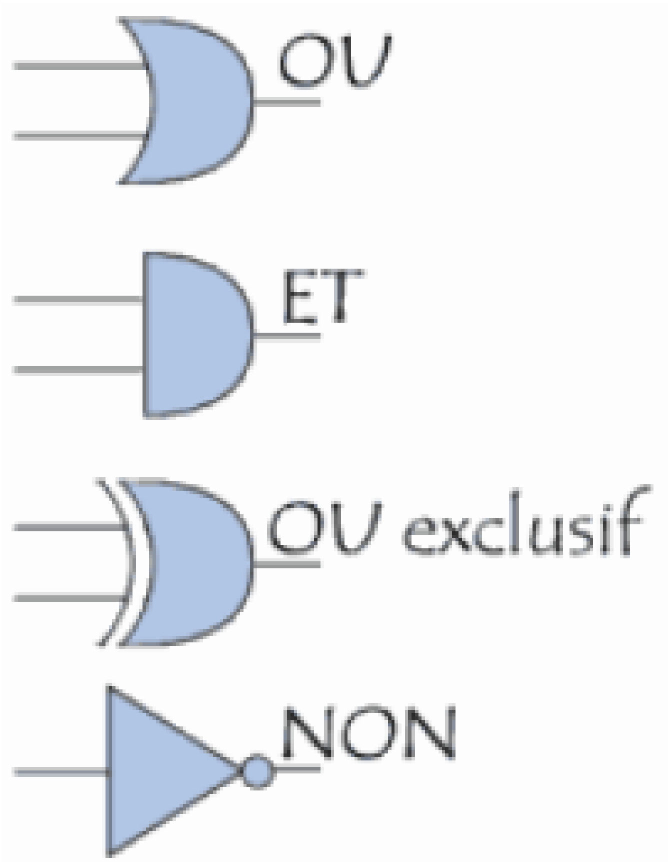
Utilisation de l’algèbre binaire

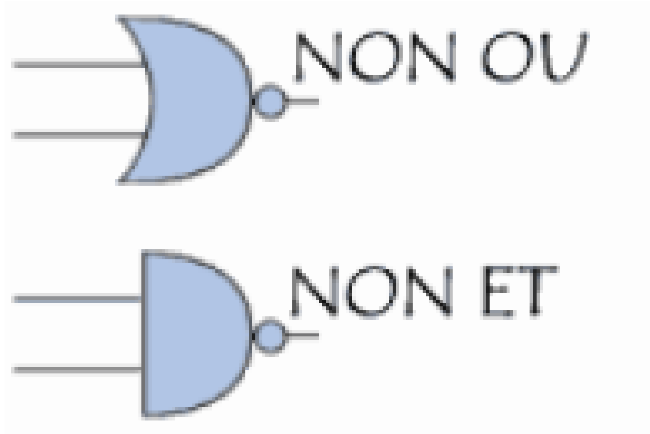
Propositions logiques	Algèbre binaire
FAUX	0
VRAI	1
Proposition (P)	Variable (A)
Négation (NON P)	Complément (/A)
Somme (P1 OU P2)	Somme (A+B)
Produit (P1 ET P2)	Produit (A.B)

8

Circuits logiques

Représentation conventionnelle des portes logiques :





Réalisation de circuits logiques :

Exemple avec l’expression algébrique suivante :

(A+B).(A+/C)